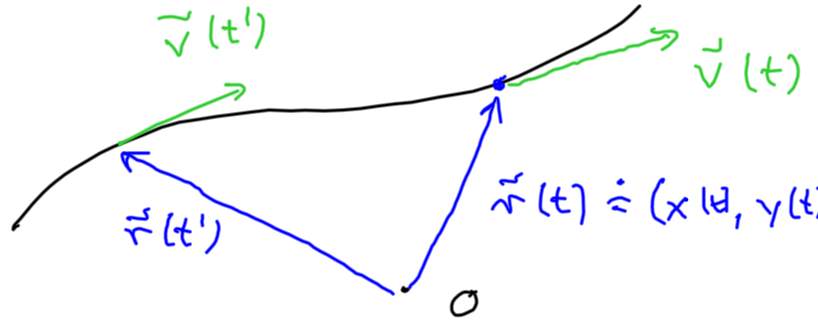
II. Kinematik

II. 1 Raumkurven



$\vec{r}(t) \doteq (x(t), y(t), z(t))$

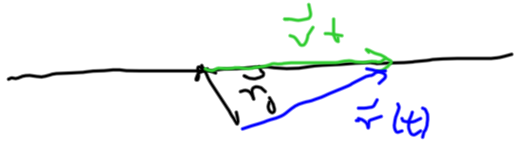
Vektorfunktion

$$\vec{f}(t) \doteq (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

Beispiele:

- geradlinig, konst. Geschwindigkeit $\vec{v}$
  zur Zeit $t=0$ sei $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ $\Big\} \Rightarrow$

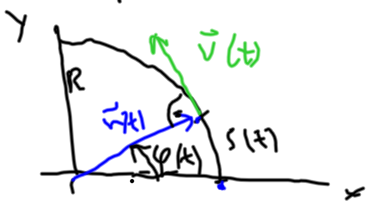
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t \qquad (2.1)$$



$$\doteq (x_0 + v_1 t,\ y_0 + v_2 t,\ z_0 + v_3 t)$$

Parameterdarstellung einer Geraden

- Kreisbewegung in xy-Ebene um Ursprung, im pos. Drehsinn mit konstantem $v = |\vec{v}|$

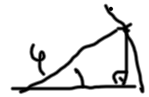


Start $t=0$, $\varphi = 0$

Bogenlänge $s(t) = vt$

Winkel $\varphi(t) = \frac{s(t)}{R} = \frac{vt}{R} = \omega t$

Winkel-Geschw. $\omega = v/R$



$$\vec{r}(t) \doteq R\,(\cos\omega t,\ \sin\omega t,\ 0) \qquad (2.2)$$

Periode $T = 2\pi/\omega$ weil $\vec{r}(t+T) = \vec{r}(t)$

Geschwindigkeit: $\vec{v} \perp \vec{r} \rightsquigarrow \vec{v} \parallel \vec{e}_z \times \vec{r}$, $v = R\omega$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cos\\ \sin\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\\ \cos\\ 0\end{pmatrix} \doteq \vec{e}_v \rightsquigarrow \vec{v} = v\vec{e}_v = R\omega\,\vec{e}_v$$

$$\vec{v}(t) \doteq R\omega\,(-\sin\omega t,\ \cos\omega t,\ 0) \qquad (2.3)$$

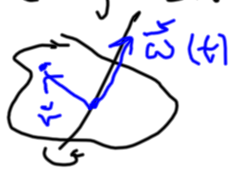
alternativ: $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \doteq (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ ✓

gilt allgemein: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \qquad (2.4)$

- Schraubenlinie (in z-Richtung)

$$\vec{r}(t) \doteq (R\cos\omega t,\ R\sin\omega t,\ v_3 t) \qquad (2.5)$$

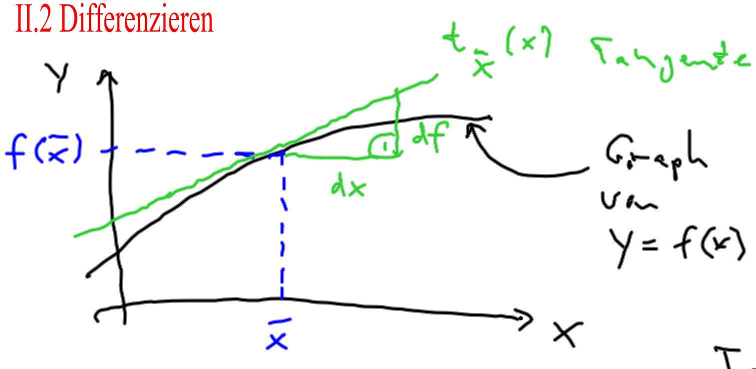
Bemerkung zur Kreisbewegung: i.a. ist ω ein Vektor

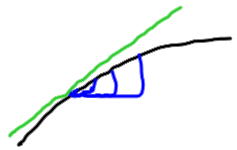


Winkelgeschw. $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\,\vec{e}_{Achse}(t)$

Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) \qquad (2.6)$

II.2 Differenzieren





Ableitung von $f(x)$ bei $\bar{x}$

= Anstieg der Kurve bei $x = \bar{x}$

= Steigung der Tangente bei $\bar{x}$

Tangente: $t_{\bar{x}}(x) = f(\bar{x}) + a \cdot (x - \bar{x})$

Notation: $a = a(\bar{x}) =: f'(\bar{x})$

↑ Ableitung

$$f'(\bar{x}) \equiv (\partial_x f)(\bar{x}) = \frac{df}{dx}(\bar{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\bar{x}+\varepsilon) - f(\bar{x})}{\varepsilon} \qquad (2.7)$$

Grenzwert, Differentialquotient

df, dx: „Differentiale"

andersherum:

Terme, die schneller als ε nach Null gehen.

$$\left.\begin{aligned} f(\bar{x}+\varepsilon) &= f(\bar{x}) + \varepsilon \cdot f'(\bar{x}) + O(\varepsilon^2) \\ df(\bar{x}) &= f'(\bar{x}) \cdot dx \end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

(„von Ordnung ε^2")

Differenzieren = Bilden der Ableitung für jedes $\bar{x}$

Ergebnis: Ableitungsfunktion $f'(\bar{x})$ von $\bar{x}$

Ableiten ist eine Operation $f \longmapsto f' \equiv \frac{df}{dx} \equiv \partial_x f$

"$\frac{d}{dx}$" oder "∂_x"

Funktionswerte sind $f'(x) \equiv \frac{df}{dx}(x) \equiv (\partial_x f)(x)$

Beispiele:

- $f(x) = x^3$

$$\partial_x x^3 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(x+\varepsilon)^3 - x^3}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2\varepsilon + 3x\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - \cancel{x^3}}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cancel{\varepsilon}(3x^2 + 3x\varepsilon + \varepsilon^2)}{\cancel{\varepsilon}} = 3x^2$$

- $f(x) = \sqrt{x}$

$$\partial_x \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x}}{\varepsilon} = \frac{(\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})}{\varepsilon(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})} = \frac{\cancel{x} + \cancel{\varepsilon} - \cancel{x}}{\cancel{\varepsilon}(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

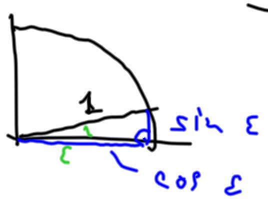
- $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\partial_x \frac{1}{x} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x+\varepsilon} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{x - (x+\varepsilon)}{(x+\varepsilon)x} = \frac{1}{\cancel{\varepsilon}} \frac{-\cancel{\varepsilon}}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

• $f(x) = \cos x$

$$\partial_x \cos x = \frac{1}{\varepsilon}\left[\cos(x+\varepsilon) - \cos x\right] = \frac{1}{\varepsilon}\left[\cos x \cdot \cos\varepsilon - \sin x \cdot \sin\varepsilon - \cos x\right]$$

$$\sin\varepsilon = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \qquad \cos\varepsilon = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$



$$= \frac{1}{\cancel{\varepsilon}}\left[\cancel{\cos x \cdot 1} - \sin x \cdot \cancel{\varepsilon} - \cancel{\cos x}\right]$$

$$= -\sin x$$

$$\partial_t \cos \omega t = \frac{d \cos \omega t}{dt} = \omega \frac{d \cos \underline{\omega t}}{d\, \underline{\omega t}} = \omega \frac{d \cos \underline{x}}{d\underline{x}}$$

$$= -\omega \sin \underline{x} = -\omega \sin \underline{\omega t}$$

Leibnizregel oder Produktregel

$$\partial_x (f \cdot g)(x) = \frac{1}{\varepsilon}\left[f(x+\varepsilon)\cdot g(x+\varepsilon) - f(x)\cdot g(x)\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\{f(x) + \varepsilon f'(x)\}\{g(x) + \varepsilon g'(x)\} - f(x)\, g(x)\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{\varepsilon}}\left[\cancel{f\cdot g} + \cancel{\varepsilon} f'\cdot g + \cancel{\varepsilon} f\cdot g' + \underline{\varepsilon^2 f'\cdot g'} - \cancel{f\cdot g}\right](x)$$

$$(f\cdot g)'(x) = (f'\cdot g)(x) + (f\cdot g')(x) \qquad (2.9)$$

Differenzieren einer Vektorfunktion

$$\vec{k}(t) \doteq (k_1(t), k_2(t), k_3(t))$$

math.: Abb. $\mathbb{R} \supset I \longrightarrow \vec{k}$

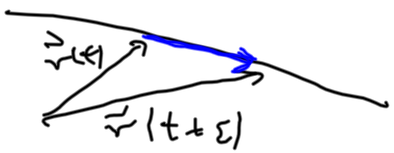
$t \longmapsto \vec{k}(t)$

Änderungsvektor:

$$\partial_t \vec{k}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\vec{k}(t+\varepsilon) - \vec{k}(t)}{\varepsilon} = \frac{d\vec{k}}{dt}(t) =: \dot{\vec{k}}(t)$$

$$\doteq (\dot{k}_1(t), \dot{k}_2(t), \dot{k}_3(t))$$

$$\doteq \vec{e}_1 \dot{k}_1(t) + \vec{e}_2 \dot{k}_2(t) + \vec{e}_3 \dot{k}_3(t)$$



falls $\vec{k} = \vec{r}$:

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \doteq (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ (2.4)

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \doteq (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ (2.10)

Rechenregeln:

$$\partial_t(\vec a+\vec b) = \dot{\vec a}+\dot{\vec b}\,, \quad \partial_t(\vec a\cdot\vec b) = \dot{\vec a}\cdot\vec b + \vec a\cdot\dot{\vec b}$$

$$\partial_t(\lambda\vec a) = \dot\lambda\vec a + \lambda\dot{\vec a}\,, \quad \partial_t(\vec a\times\vec b) = \dot{\vec a}\times\vec b + \vec a\times\dot{\vec b} \qquad (2.11)$$

Tricks:

- $\vec a\cdot\vec b = \text{const.} \longrightarrow \dot{\vec a}\cdot\vec b = -\,\vec a\cdot\dot{\vec b}$

  z.B. $\vec e\cdot\dot{\vec e} = 0$ für $\vec e^{\,2} = 1$

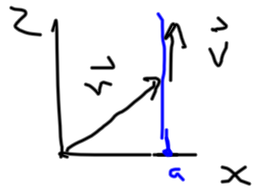
- $\vec a\cdot\dot{\vec a} = \frac{1}{2}\partial_t(\vec a\cdot\vec a) = \frac{1}{2}\partial_t a^2 = a\dot a$ mit $a = |\vec a|$

Anwendung: $\vec a = \vec r$

$$\longrightarrow \dot r = \vec r\cdot\dot{\vec r}/r = \dot{\vec r}\cdot\vec e_r = v_{\parallel} \neq v$$

Beispiele:

— geradlinige Bewegung nach oben

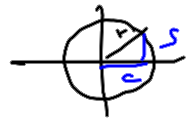


$\vec r(t) \doteq (a, v_0 t)$ $\qquad r = \sqrt{a^2+v_0^2t^2}$

$\dot{\vec r}(t) \doteq (0, v_0)$ $\qquad v = v_0 \neq \dot r = \dfrac{v_0^2 t}{\sqrt{a^2+v_0^2t^2}}$

$\ddot{\vec r}(t) \doteq (0, 0)$ $\qquad a = 0$

— Kreisbewegung $\qquad c := \cos \omega t\,, \quad s := \sin \omega t$



$\vec r(t) \doteq R\,(c, s)$ $\qquad r = R \qquad \dot r = 0$

$\dot{\vec r}(t) \doteq R\omega\,(-s, c)$ $\qquad v = R\omega \qquad \dot v = 0$

$\ddot{\vec r}(t) \doteq R\omega^2(-c, -s) \doteq -\omega^2 \vec r(t)$ $\qquad a = R\omega^2 \qquad \dot a = 0$

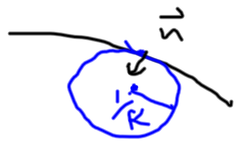
begleitende Dreibein einer Raumkurve $\vec r(t)$

$$\vec t = \dot{\vec r}/v \qquad \text{Tangenten-Einheitsvektor} \qquad (2.12)$$

$$\dot{\vec t} = \frac{\ddot{\vec r}}{v} - \frac{\dot{\vec r}\,\dot v}{v^2} = \dot{\vec r}\times(\ddot{\vec r}\times\dot{\vec r})/v^3 \perp \vec t$$

$$= v\kappa\vec n \qquad (2.13) \qquad \vec n: \text{Normalen-Einheitsvektor}$$

$$\dot{\vec t}\cdot\vec n = v\kappa\,\vec n\cdot\vec n = v\kappa = |\dot{\vec t}| = \frac{|\ddot{\vec r}\times\dot{\vec r}|}{v^2} = \frac{|\ddot{\vec r}_\perp|}{v}$$



$$\kappa = |\ddot{\vec r}_\perp|/v^2 \qquad \text{Krümmung} \qquad 1/\kappa \quad \text{Krümmungsradius}$$

$$\dot{\vec n} = v(\lambda\vec t + \tau\vec b) \quad \text{mit} \quad \vec b = \vec t\times\vec n = \frac{\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}}{|\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}|} \qquad \text{Binormale} \qquad (2.14)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\vec t \to v\lambda = \dot{\vec n}\cdot\vec t \overset{\text{trick}}{=} -\vec n\cdot\dot{\vec t} = -v\kappa \to \lambda = -\kappa \\ \cdot\vec b \to v\underline{\tau} = \dot{\vec n}\cdot\vec b = \dots = v\,\underline{\dfrac{\dot{\vec r}\cdot(\ddot{\vec r}\times\dddot{\vec r})}{|\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}|^2}} \qquad \tau: \text{Torsion} \end{array}\right\} (2.15)$$

$$\dot{\vec b} = \partial_t(\vec t\times\vec n) = \overset{=0}{\dot{\vec t}\times\vec n} + \vec t\times\dot{\vec n} = -v\tau\vec n$$

zusammen!

Frênet-Formeln

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\vec t} = v\kappa\vec n \\ \dot{\vec n} = -v\kappa\vec t + v\tau\vec b \\ \dot{\vec b} = -v\tau\vec n \end{array}\right\} (2.16)$$

$$\left.\begin{array}{l} \kappa = \dfrac{|\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}|}{v^3} \\ \tau = \dfrac{\dot{\vec r}\cdot(\ddot{\vec r}\times\dddot{\vec r})}{|\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}|^2} \end{array}\right\} (2.17)$$

Geschwindigkeit & Beschleunigung

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = v\vec{t}$ tangential

$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \partial_t(v\vec{t}) = \dot{v}\vec{t} + v\dot{\vec{t}} = \dot{v}\vec{t} + v^2\varkappa\vec{n}$

in Schmiegungsebene $= a_{\parallel}\vec{t} + a_{\perp}\vec{n}$ (2.18)

II. 3 Kettenregel und Gradient

sei $h(x) := f(g(x)) = f(y)$ mit $y = g(x)$

$x \xrightarrow{g} y = g(x) \xmapsto{f} f(y) = f(g(x)) = h(x)$ $h = f \circ g$

differenziere:

$(\partial_x h)(x) = \frac{1}{\varepsilon}[h(x+\varepsilon) - h(x)] = \frac{1}{\varepsilon}[f(\underbrace{g(x+\varepsilon)}) - f(g(x))]$

$= \frac{1}{\varepsilon}[f(\underbrace{g(x) + \overbrace{\varepsilon \cdot g'(x)}^{\delta}}) - f(g(x))] = \frac{1}{\varepsilon}[f\underbrace{(y+\delta)} - f(y)]$

$= \frac{1}{\varepsilon}[\underbrace{\cancel{f(y)} + \delta \cdot f'(y)} - \cancel{f(y)}] = \frac{1}{\varepsilon}[\underbrace{\varepsilon \cdot g'(x)} \cdot f'(g(x))]$

$= f'(g(x)) \cdot g'(x) = (\partial_y f)(g(x)) \cdot (\partial_x g)(x)$ (2.19a) anders:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{d(f\circ g)}{dx} = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx} \qquad (2,19\delta)$$

[Vorsicht: $\underset{\substack{\| \\ h'(x)}}{f(g(x))'} = f'(g(x)) = f'(y)$ falsch!]

Funktionen mehrerer Variabler

$f(x,y,z)$ $\quad (\partial_x f)(x,y,z) = \frac{1}{\varepsilon}\left[f(x+\varepsilon,y,z) - f(x,y,z)\right]$

partielle Ableitung

genauso $\partial_y f$, $\partial_z f$ entsprechend

Verkettung: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $\rightsquigarrow$ $\underset{\substack{\| \\ h(t)}}{f(\vec{r}(t))}$

Ableitung: $\partial_t h = \frac{1}{\varepsilon}\left[f(x(t+\varepsilon), y(t+\varepsilon), z(t+\varepsilon)) - f(x,y,z)\right]$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[f(x(t)+\varepsilon\dot{x}(t), y(t)+\varepsilon\dot{y}(t), z(t)+\varepsilon\dot{z}(t)) - f(x,y,z)\right]$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\left[-f(x, y+\varepsilon\dot{y}, z+\varepsilon\dot{z}) + f(x,y+\varepsilon\dot{y}, z+\varepsilon\dot{z}) - f(x,y,z+\varepsilon\dot{z}) + f(x,y,z+\varepsilon\dot{z})\right]$$

$$= \partial_x f(x,y,z)\cdot\dot{x} + \partial_y f(x,y,z)\cdot\dot{y} + \partial_z f(x,y,z)\cdot\dot{z}$$

also:

$$\partial_t f(\vec r(t)) = \dot x(t)\,\partial_x f(\vec r(t)) + \dot y(t)\,\partial_y f(\vec r(t)) + \dot z(t)\,\partial_z f(\vec r(t))$$

$$\doteq \begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\\ \partial_z f\end{pmatrix}(\vec r(t)) \doteq \dot{\vec r}\cdot \vec\nabla f(\vec r(t)) \qquad (2.20)$$

„Nabla"

Gradient einer Funktion

$$\vec\nabla f(x,y,z) \doteq \left(\partial_x f(x,y,z),\ \partial_y f(x,y,z),\ \partial_z f(x,y,z)\right)$$

anschaulich:

gegeben Potenzial $V(\vec r)$ (für $f(\vec r)$)

Äquipotenzialfläche $V(\vec r) = \text{const.}$ $\rightsquigarrow$ $\vec r \in$ Fläche

Trick: betrachte Kurve $\vec r(t)$ in der Ä-Fläche

dann gilt: $0 = \partial_t V(\vec r(t)) = \dot{\vec r}(t)\cdot\vec\nabla V(\vec r(t))$

in Ä-Fläche

$\Rightarrow$ $\vec\nabla V \perp$ Ä-Fläche